المادة: الرياضيات

ملخص لدرس المتتاليات الترجعية

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

I. المتتاليات الحسابية: تذكير

تمرين1

لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1. 0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...
2. 6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 , -12 , ...
3. 1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , ...
4. $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32} ,$ ....
5. 1 , 2 , 4 , 9 , 16 , 32 , 64 , ...

مثال1 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n = 2n-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

- أحسب حدها الأول u_0
- أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$
- أحسب $u_{n+1}-u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. تعريف :

نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث : $u_{n+1}=u_n+r \quad \forall n\geq n_0$

العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$

تمرين2 :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n = 2n+3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب : $u_{n+1}-u_n$
2. ماذا تستنتج ؟

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} فان : $u_n = u_{n_0}+(n-n_0)r$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فان : $u_n = u_p+(n-p)r$ لكل $n\geq n_0$ و $p\geq n_0$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية

نضع $S_n = u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_n$ حيث $n \succ p\geq n_0$

لدينا $S_n = (n-p+1)\left(\frac{u_n+u_p}{2}\right)$

المجموع $S_n = u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_n$ يحتوي على $(n-p+1)$ حد

تمرين3 :

1. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0=1$

أحسب المجموع التالي : $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}$

2. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ و حدها الأول $u_0=4$

أحسب المجموع التالي : $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}$

تمرين4 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية : $u_n=\frac{n+3}{4}$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية
2. أحسب المجموع : $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_6$

II. المتتاليات الهندسية

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n=2\times 3^n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب حدها الأول u_0
2. أحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$
3. ماذا تستنتج ؟

1. تعريف:

نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q بحيث : $u_{n+1}=qu_n$ $\quad \forall n\geq n_0$

العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$

تمرين5 :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n=3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

بين أن (u_n) متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول

2.صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_{n_0} فان : $u_n=u_{n_0}q^{n-n_0}$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم فان : $u_n=u_mq^{n-m}$ لكل $n\geq n_0$ و $m\geq n_0$

3.مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم نضع $S_n=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_n$

حيث $n\succ p\geq n_0$ لدينا :

- إذا كان $q\neq 1$ فان : $S_n=u_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-p}\right)$
- إذا كان $q=1$ فان : $S_n=(n-p+1)\times u_p$

تمرين6 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية : $u_{n+1}=3\times U_n$ و $u_0=2$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية
2. أعبر عن U_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_6$

III. المتتاليات من صنف $U_{n+1}=aU_n+b$

مثال : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة الترجعية التالية : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=2u_n+3 \end{cases}$

أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

ملاحظة : *هذه المتتالية تسمى متتالية ترجعيه*

تمرين7 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+8$

1. نفترض أن : $u_0=12$ أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. نفترض أن : $u_0=3$ أحسب u_1 و u_2 و u_3

تمرين8 : نعتبر المتتالية الترجعية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n} \\ u_0=2 \end{cases}$ أحسب u_1 و u_2 و u_3

تمرين9 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}^*\begin{cases} u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1 \\ u_0=10 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=u_n-3$

1. أحسب v_0 و v_1 و v_2
2. أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب بدلالة n المجموع : $S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

تمرين10 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases} u_{n+1}=2u_n+2 \\ u_0=2 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=u_n+2$

1. أحسب v_0 و v_1
2. أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أنشئ في معلم متعامد ممنظم المستقيم ذو المعادلة : $y=x$ و المستقيم ذو المعادلة : $y=2x+2$
6. مثل مبيانيا الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n)

تمرين11 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=5^n-1$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=5u_n+4$

تمرين 12 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=2\times3^n-1$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=3u_n+2$

تمرين 13 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1 \\ u_0 = 3 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \frac{2}{3}$

1. أحسب v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $-\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أنشئ في معلم متعامد ممنظم المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ و المستقيم ذو المعادلة : $y = 2x + 2$
6. مثل مبيانيا الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n)

تمرين14 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} \\ u_0 = 3 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 1$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim_{n \to +\infty} v_n$ و $\lim_{n \to +\infty} u_n$

تمرين15 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + \frac{3}{2} \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + \frac{3}{4}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{13}{12} \times 3^n - \frac{3}{4}$
5. أحسب : $\lim_{n \to +\infty} v_n$ و $\lim_{n \to +\infty} u_n$

تمرين16 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \frac{8}{3}$

1. أحسب v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $\frac{1}{4}$

3. أكتب v_n بدلالة n

4. استنتج u_n بدلالة n

5. أحسب : $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$

6. بين أن:
$$v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-1} = -\frac{44}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

7. بين أن:
$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1} = -\frac{44}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) + \frac{8}{3}n$$